Nachprüfung der Lehre von den Ebenen in Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

ANNA STURMFELS

aus Bad Nauheim.

MARBURG 1915

v. Münchow'sche Hof- und Universitäts-Druckerei (Otto Kindt), Gießen.

Diss. Marburg
1915.

Nachprüfung der Lehre von den Ebenen in Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

ANNA STURMFELS

aus Bad Nauheim.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

MARBURG 1915

v. Münchow'sche Hof- und Universitäts-Druckerei (Otto Kindt), Gießen.

Von der philosophischen Fakultät zu Marburg als Dissertation
angenommen am 11. August 1915.
Berichterstatter: Herr Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. Hensel.

Einleitung.

In dem Buch: Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, zweite Ausgabe 1912, hat Pasch sich die Aufgabe gestellt, die empiristische Auffassung der Mathematik*) für die Geometrie durchzuführen, und zwar so, daß die Lehren der Geometrie sich aus einer Anzahl von Grundtatsachen entwickeln. Die Grundtatsachen waren der Erfahrung zu entnehmen und in Grundsätzen niederzulegen; die übrigen Lehren, die Lehrsätze, mußten rein logisch ohne weiteres Zurückgehen auf die sinnliche Anschauung, aus den Erfahrungssätzen abgeleitet werden. Es bestand also die Aufgabe, die Grundtatsachen in erschöpfender Weise zu sammeln und in der Form von Grundsätzen auszusprechen.

Bei der ursprünglichen Bearbeitung des Buches (1882) hat der Verfasser jedoch diese Aufgabe nicht vollständig gelöst; siehe Seite 204 der zweiten Ausgabe, Erster Zusatz zu § 1. Infolgedessen besteht das Bedürfnis, die im Buch aufgeführten Grundsätze zu ergänzen. Dabei handelt es sich (siehe a. a. O.) wesentlich um Tatsachen, durch die die Möglichkeit der Konstruktionen verbürgt wird.

Zu § 1 des Buches, der von der geraden Linie handelt, hat der Verfasser selbst Ergänzungen gegeben; siehe Seite 204—209 der zweiten Ausgabe. Für § 2 des Buches, der von der Ebene handelt, ist dies aber noch nicht ge-

*) Vergl. Pasch, Veränderliche und Funktion, 1914, § 69.

schehen; dazu ist eine einschneidende Umarbeitung dieses Paragraphen nötig. Die nachstehende Abhandlung versucht nun, eine solche Umarbeitung zu bringen und sie auf die folgenden Paragraphen des Buches anzuwenden.

Das genannte Werk werde ich immer mit „NG“ anführen.

§ 1. Die ebene Fläche als Grundbegriff.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich zuerst mit der „ebenen Fläche“; ich verstehe darunter nach dem Vorgang der NG etwas völlig Begrenztes, also nicht das, was man in der Geometrie bei dem üblichen Sprachgebrauch als „Ebene“ bezeichnet. Eine solche Unterscheidung war notwendig, weil die NG von empirischen Begriffen ausgehen will. Aus demselben Grunde konnte in § 1 der NG nicht die sogenannte „gerade Linie“ als Grundbegriff angenommen werden. Vielmehr dient dort als Grundbegriff die „gerade Strecke“; denn es „wird unmittelbar aus den Wahrnehmungen nur die wohlbegrenzte gerade Linie, der gerade Weg zwischen zwei Punkten, die gerade Strecke aufgefaßt“ (NG Seite 4). Auf den Begriff der geraden Strecke gründet sich der der „geraden Reihe“ (NG Seite 7 Def. 2), und von da wird zur „geraden Linie“ übergegangen (NG Seite 8 Def. 3).

Die Rolle, die hier die gerade Strecke spielte, übernimmt für die Einführung der Ebene der Begriff der „ebenen Fläche“ als Grundbegriff; denn „wenn wir uns an die unmittelbare Wahrnehmung halten, so lernen wir nur die wohlbegrenzte ebene Fläche kennen“ (NG Seite 20). Demgemäß ist in § 2 meiner Arbeit nur von der „ebenen Fläche“ und von „Punkten einer ebenen Fläche“ die Rede. Der Begriff der „Ebene“ dagegen wird erst in § 3 meiner Arbeit eingeführt und zwar nicht als Grundbegriff, sondern mittels einer Definition.

§ 2. Grundsätze über die ebene Fläche.

Grundbegriffe. — Ebene Fläche, Punkt einer ebenen Fläche.

Definition 1. — Von einem Punkt einer ebenen Fläche sagt man: er liegt auf ihr, er gehört ihr an, die Fläche enthält ihn, sie geht durch ihn.

Grundsatz I. — Auf jeder ebenen Fläche kann man einen Punkt angeben.

Grundsatz II. — Ist auf einer ebenen Fläche ein Punkt angegeben, so kann man auf ihr einen weiteren Punkt angeben.

Grundsatz III. — Sind auf einer ebenen Fläche zwei Punkte A und B angegeben, so kann man auf ihr einen Punkt C so angeben, daß A, B, C nicht auf einer geraden Strecke liegen.

Grundsatz IV. — Durch drei Punkte, die nicht auf einer geraden Strecke liegen, kann man eine ebene Fläche legen.

Grundsatz V. — Ist eine ebene Fläche angegeben, so kann man eine andre angeben, die alle Punkte der vorigen enthält.

Grundsatz VI. — Sind zwei ebene Flächen angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der der einen angehört, der andern aber nicht.

Definition 2. — Enthält eine ebene Fläche P alle Punkte einer andern ebenen Fläche P′, so nennt man P eine Erweiterung von P′. Eine Erweiterung von P′ angeben heißt: P′ erweitern.

Grundsatz VII. — Ist durch drei Punkte, die nicht auf einer geraden Strecke liegen, eine ebene Fläche P gelegt, so kann durch dieselben Punkte eine ebene Fläche P′ so gelegt werden, daß weder alle Punkte von P zu P′ gehören, noch alle Punkte von P′ zu P.

Lehrsatz 1. — Ist eine ebene Fläche P angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der nicht auf P liegt,

aber mit allen Punkten von P in einer ebenen Fläche enthalten ist.

Beweis. — Es sei P′ eine Erweiterung von P. Wählt man in P′ einen Punkt, der P nicht angehört, so liegt dieser doch in einer ebenen Fläche mit allen Punkten von P.

Grundsatz VIII. — Sind zwei Punkte der ebenen Fläche P zugleich Punkte der geraden Strecke s, so enthält entweder P alle Punkte von s, oder man kann eine ebene Fläche angeben, die alle Punkte von P und von s enthält.

Definition 3. — Sind alle Punkte der Strecke s zugleich Punkte der ebenen Fläche P, so sagt man: s ist in P enthalten, s gehört P an, liegt in P, ist eine Strecke von P.

Lehrsatz 2. — Durch drei beliebige Punkte A, B, C kann man eine ebene Fläche legen.

Beweis. — Liegen die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden, so ist eine solche ebene Fläche möglich nach Grundsatz IV. Liegen A, B, C in einer Geraden, etwa C zwischen A und B, so können wir einen Punkt D so wählen, daß A, B, D nicht in einer Geraden liegen. Durch A, B, D legen wir eine ebene Fläche P; es gibt dann eine ebene Fläche P′, welche alle Punkte von P und auch die Strecke AB, mithin die Punkte A, B, C enthält.

Lehrsatz 2 a. — Liegen von den Punkten A, B, C, D drei auf einer Geraden, so liegen A, B, C, D auf einer ebenen Fläche.

Beweis. — Es mögen A, B, C auf einer Geraden liegen, C zwischen A und B. Durch A, B, D kann man eine ebene Fläche P legen; es gibt dann nach Grundsatz VIII eine ebene Fläche P′, die alle Punkte von P und auch die Strecke AB enthält.

Grundsatz IX. — Liegen die Punkte A, B, C nicht auf einer geraden Strecke, so kann man einen weiteren Punkt D so angeben, daß A, B, C, D nicht auf einer ebenen Fläche liegen.

Lehrsatz 2b. — Liegen vier Punkte nicht auf einer ebenen Fläche, so liegen keine drei von ihnen auf einer Geraden.

Definition 4. — Ein beliebiger Verein von Punkten oder Strecken oder Punkten und Strecken einer ebenen Fläche heißt eine ebene Figur.

Eine (ebene oder sonstige) Figur herstellen oder erweitern heißt: konstruieren.

Lehrsatz 3. — Geht die ebene Fläche P durch drei Punkte A, B, C einer Geraden, so kann man durch A, B, C eine ebene Fläche P′ so legen, daß nicht alle Punkte von P und P′ in einer ebenen Fläche enthalten sind.

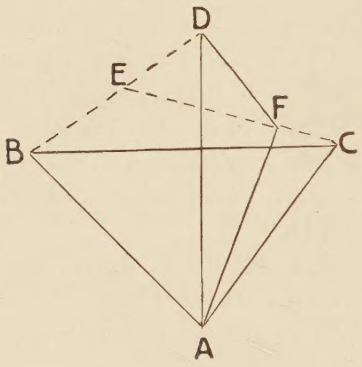
Beweis. — Es liege etwa C zwischen A und B. Wir wählen auf der ebenen Fläche P einen Punkt D so, daß A, B, D nicht in einer Geraden liegen; weiter nehmen wir einen Punkt E so, daß A, B, D, E keine ebene Figur bilden. Durch A, B, E legen wir eine ebene Fläche P′; diese oder eine Erweiterung enthält auch den Punkt C. Es gibt keine ebene Fläche, die alle Punkte von P und P′ oder der Erweiterung von P′ enthält; denn sonst müßten A, B, D, E eine ebene Figur bilden.

Lehrsatz 4. — Geht die ebene Fläche P durch den Punkt A, so kann man durch A eine ebene Fläche P′ so legen, daß nicht alle Punkte von P und P′ in einer einzigen ebenen Fläche liegen.

Beweis. — Auf P wählen wir den von A verschiedenen Punkt B beliebig, dann C auf P so, daß A, B, C keine gerade Reihe bilden, und endlich D so, daß A, B, C, D keine ebene Figur bilden. Legen wir durch A, B, D eine ebene Fläche P′, so gehen P und P′ durch A, aber es gibt keine ebene Fläche, in der alle Punkte von P und P′, also die Punkte A, B, C, D liegen.

In Grundsatz X werden zwei ebene Flächen P und P′ vorausgesetzt, die durch einen Punkt gehen, und es wird ausgesprochen, daß solche Flächen — nötigenfalls erwei-

tert — noch einen zweiten Punkt gemein haben. Ein zweiter Punkt ist ohne weiteres vorhanden, wenn alle Punkte von P und P′ in einer einzigen ebenen Fläche liegen; es handelt sich daher nur um den in Lehrsatz 4 bezeichneten Fall. Nun tritt in dem obigen Beweise schon bei der Konstruktion ein zweiter Punkt auf, der zugleich auf P und P′ liegt, nämlich B; wir bedürfen also in diesem Fall gar nicht des Grundsatzes X, um zu erfahren, daß es einen solchen zweiten Punkt gibt. Wir werden vielmehr den Grundsatz nur brauchen, wenn sich nicht schon aus der Konstruktion von P und P′ ein von A verschiedener Punkt ergibt, der zugleich auf P und P′ liegt. Eine solche Konstruktion ist die folgende: Die ebene Fläche P und die Punkte A, B, C, D behalten wir bei und wählen auf der Geraden BD den Punkt E, etwa zwischen B und D, weiter auf der Geraden CE den Punkt F, etwa zwischen C und E, und legen durch A, D, F eine ebene Fläche P′. Wäre ABCE eine ebene Figur, oder ABCF, so wäre es auch ABCDEF, also ABCD. Mithin liegen D, E, F nicht in P. Ebensowenig liegen B, C, E in P′; denn sonst wäre ABDF oder ACDF oder ADEF eine ebene Figur, folglich wieder ABCDEF.



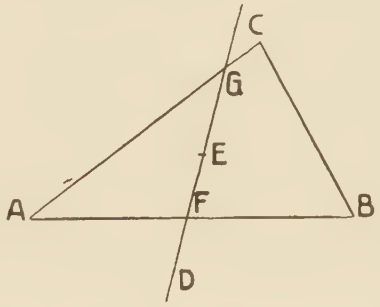
Da A, B, C, F keine ebene Figur bilden, so liegen nicht alle Punkte von P und P′ in einer ebenen Fläche. Der Punkt A gehört P und P′ zugleich an, aber keiner der übrigen auftretenden Punkte B, C, D, E, F.

Grundsatz X. — Wenn zwei ebene Flächen P und P′ einen Punkt gemein haben, so kann man einen anderen Punkt angeben, der sowohl mit allen Punkten von P, als

auch mit allen Punkten von P′ je in einer ebenen Fläche enthalten ist.

Lehrsatz 5. — Man kann Punkte A, B, C, D, E so wählen, daß sie eine ebene Figur bilden, aber nicht drei von ihnen eine gerade Reihe, und daß die Strecken AB, DE einen inneren Punkt gemein haben.

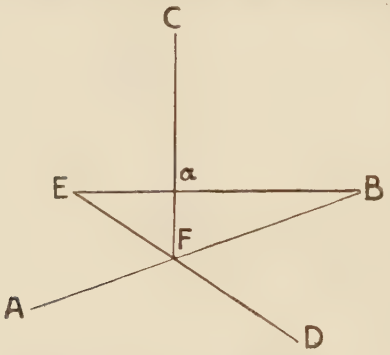
Beweis. — Es seien A, B, C drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen; F sei ein innerer Punkt der Strecke AB, G ein innerer Punkt der Strecke AC. Die Strecken AB, BC, CA bilden mit jeder durch F und G gehenden Strecke eine ebene Figur. Auf der durch F und G gehenden Geraden wählen wir Punkte D und E so, daß F zwischen D und G und E zwischen F und G fällt, mithin F auch zwischen D und E. Die Gerade FG ist verschieden von den Geraden AB, BC, CA, hat also mit jeder nur einen Punkt gemein. Es liegen folglich D und E nicht auf AB oder AC. Fällt D auf die Gerade BC, so wählen wir zwischen ihm und F einen andern Punkt und bezeichnen diesen mit D. Sollte E auf die Gerade BC fallen, so könnten wir zwischen ihm und F einen andern Punkt annehmen und diesen mit E bezeichnen.



Die Strecken AB, BC, DG bilden eine ebene Figur, also auch die Punkte A, B, C, D, E. Es liegen von diesen Punkten keine drei auf einer Geraden, und es haben die Strecken DE und AB einen inneren Punkt gemein.

In Grundsatz XI wird vorausgesetzt, daß Punkte A, B, C, D, E, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen sollen, eine ebene Figur bilden und die Strecken AB und DE einen inneren Punkt gemein haben, und es wird ausgesagt, daß dann die Gerade DE auch mit der

Strecke AC oder mit der Strecke BC einen Punkt gemein hat. In dem obigen Beweis tritt nun schon bei der Konstruktion ein Punkt auf, den die Gerade DE mit der Strecke AC gemein hat; wir bedürften also in diesem Fall nicht des Grundsatzes XI, um zu erfahren, daß es einen solchen Punkt gibt. Wir werden vielmehr den Grundsatz nur brauchen, wenn nicht schon bei der Konstruktion der Figur ein Punkt auftritt, den die Gerade DE mit einer der Strecken AC oder BC gemein hat. Eine solche Konstruktion ist die folgende: Wir können auf einer ebenen Fläche drei



Punkte A, B, D so wählen, daß sie nicht in einer Geraden liegen. Es liegen dann die Strecken AB, BD, DA in einer ebenen Fläche. Auf der Strecke AB nehmen wir einen inneren Punkt F und auf der Geraden DF einen Punkt E so, daß F zwischen E und D liegt. Es liegen dann von den Punkten A, B, D, E keine drei in einer Geraden, und die Strecken AB, BD, DA, DE, EB bilden eine ebene Figur. Ist nun α ein innerer Punkt der Strecke EB, so bildet auch jede durch F und α gelegte Strecke mit diesen Strecken eine ebene Figur. Die Gerade Fα ist verschieden von den Geraden EB, BD, DE, EA, AB, AD; sie hat also mit jeder höchstens einen Punkt gemein. Die Geraden AB und DE schneiden Fα im Punkte F, die Gerade EB schneidet Fα im Punkte α. Nehmen wir nun einen Punkt C von α und F verschieden, etwa so, daß α zwischen C und F liegt, so liegt C auf keiner der Geraden EB, DE, AB. Wir können nun auch erreichen, daß es auf keiner der Geraden BD, EA, AD liegt. Fällt C auf die Gerade BD, so wählen wir zwischen ihm und α einen andern Punkt

und bezeichnen diesen mit C. Fällt C jetzt auf die Gerade EA, so nehmen wir zwischen ihm und α einen weiteren Punkt und bezeichnen diesen mit C. Sollte dieses letztere C auf die Gerade AD fallen, so könnten wir zwischen ihm und α einen anderen Punkt wählen und diesen mit C bezeichnen.

Wir haben dafür gesorgt, daß C nicht mit zweien von den Punkten, A, B, D, E eine gerade Reihe bildet, und da auch von diesen nicht drei in einer Geraden liegen, so bilden von den Punkten A, B, C, D, E keine drei eine gerade Reihe. Jede durch F und α gehende Strecke liegt mit den Punkten A, B, D, E in einer ebenen Fläche, mithin bilden die Punkte A, B, C, D, E eine ebene Figur. Es haben außerdem die Strecken AB und DE einen inneren Punkt gemein, aber es tritt nicht schon bei der Konstruktion ein Punkt auf, den die Gerade DE mit einer der Geraden AC oder BC gemein hätte.

Grundsatz XI. — Bilden die Punkte A, B, C, D, E eine ebene Figur, aber nicht drei von ihnen eine gerade Reihe, und haben die Strecken AB und DE einen inneren Punkt gemein, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung von ihr durch einen Punkt der Strecke AC oder BC.

Lehrsatz 6. — Liegen die Punkte A, B, C, D, F in einer ebenen Fläche, F auf der Strecke AB, aber sonst keine drei in einer Geraden, so geht die Gerade DF durch einen Punkt der Strecke AC oder BC.

Beweis (siehe die erste Figur zu Lehrsatz 5). — Wir nehmen auf der Geraden DF einen Punkt E so an, daß F zwischen E und D liegt. Es liegen dann die Punkte A, B, C, D, E, F in einer ebenen Fläche. Die Gerade DF ist verschieden von den Geraden AB, BC, CD, DA, AC, BD, hat also mit jeder nur einen Punkt gemein. Da der Punkt E verschieden ist von D und F, so liegt er auf keiner der Geraden AB, CD, DA, BD; wir können durch passende Wahl dann auch erreichen, daß er auf keiner

der Geraden AC oder BC liegt, daß also die Punkte A, B, C, D, E alle Voraussetzungen des Grundsatzes XI erfüllen. Aus diesem folgt dann, daß die Gerade DE d. i. DF durch einen Punkt der Strecke AC oder BC geht.

Lehrsatz 7. — Ist durch drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, eine ebene Fläche II gelegt, und ist D ein Punkt, der mit A, B, C eine ebene Figur bildet, so liegt D entweder in II oder in einer Erweiterung von II.

Beweis (siehe die erste Figur zu Lehrsatz 5). — Liegt der Punkt D in einer der Geraden AB, BC, CA, so liegt er in II oder in einer Erweiterung von II nach Grundsatz VIII. Liegt D in keiner der Geraden AB, BC, CA, so nehmen wir zwischen A und B einen Punkt F an. Liegen dann C, D, F in einer Geraden, so folgt die Behauptung wieder mittels Grundsatz VIII. Andernfalls wird Lehrsatz 6 anwendbar; die Gerade DF mag etwa durch einen Punkt G der Strecke AC gehen. F und G sind voneinander verschieden, D in der Geraden FG. Es gibt nun eine ebene Fläche Q, die alle Punkte von II enthält und auch den Punkt F, weiter eine ebene Fläche Q', die alle Punkte von Q enthält und auch den Punkt G, und endlich eine ebene Fläche, die alle Punkte von Q' enthält und auch den Punkt D. Diese ebene Fläche enthält alle Punkte von II, ist also II selber oder eine Erweiterung.

§ 3. Definition der Ebene.

Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, Q eine sie enthaltende ebene Fläche, D ein anderer Punkt von Q. Während Q Eigenname sein soll, sei II Gemeinname für jede durch A, B, C gelegte ebene Fläche; dann liegt D, wie immer ich ein II auswähle, nach § 2 Lehrsatz 7 entweder in II oder in einer Erweiterung von II. Der Punkt D steht also zu allen durch A, B, C gelegten ebenen Flächen II in einer gleichen Beziehung, und zwar

in einer Beziehung, die von der besonderen Begrenzung nicht abhängt, sondern nur von der Wahl der festen Punkte A, B, C. Infolgedessen hat man eine Redeweise angenommen, bei der weder die bestimmte durch A, B, C gehende ebene Fläche Q erwähnt wird, noch die allgemeine II, nämlich die Redeweise: D ist ein Punkt „der" durch A, B, C gehenden Ebene. In dem Begriff „Ebene" ist das festgehalten, was sich in allen II wiederholt, während die Besonderheiten der einzelnen II abgestreift sind.

An diesem Hergang kann man zwei Teile unterscheiden: 1) die Bildung eines neuen, von Q und überhaupt von allen II verschiedenen Einzelbegriffs (in Def. 1 mit P bezeichnet), 2) die Anwendung des Wortes „Ebene" für diesen Begriff. Wir stellen daher folgende Definitionen auf:

Definition 1 (implizite Definition). — Statt: D ist Punkt der ebenen Fläche Q, kann man sagen: D ist Punkt des Dinges P. Umgekehrt kann man statt: D ist Punkt des Dinges P, nicht sagen: D ist Punkt der ebenen Fläche Q, sondern nur: D ist Punkt irgend einer von den ebenen Flächen II.

Definition 2. — Das Ding P heißt eine Ebene, und zwar die Ebene der Punkte A, B, C, kurz: die Ebene ABC (Reihenfolge der Punkte gleichgültig).

Von einer Ebene ABC kann man dann und nur dann sprechen, wenn A, B, C drei Punkte sind, die nicht in gerader Linie liegen.

Definition 3. — Ist D ein Punkt der Ebene ABC, so sagt man: D liegt auf der Ebene ABC, D gehört ihr an, die Ebene enthält D, sie geht durch D, ist eine Ebene von D.

Zur Einführung des Begriffs der Ebene ist hier eine implizite Definition im Sinn von Pasch, Grundlagen der Analysis 1909 Seite 1 und 7, benutzt worden. Wir bedürfen solcher impliziten Definitionen immer da, wo wir einen neuen Begriff nicht als Ding einer gewissen Gattung, das sich von andern derselben Gattung durch bestimmte

Eigenschaften unterscheidet, einführen können. Wo dies möglich ist, steht uns eine explizite Definition zu Gebote. Eine explizite Definition gibt für das Ding, das durch die Definition mit einem bestimmten Namen belegt werden soll, jedesmal an, unter welche Gattung es fällt, und sagt, durch welche Eigenschaften es sich innerhalb der Gattung auszeichnet. So nennen wir z. B. ein Parallelogramm mit rechten Winkeln ein Rechteck. Die implizite Definition dagegen gibt nur an, in welchen Aussagen der neue Begriff vorkommen soll, und was diese Aussagen bedeuten. „Es handelt sich bei den impliziten Definitionen um Begriffe, die man abstreifen könnte, die sich aber eingebürgert haben, weil sie nicht bloß die Ausdrucksweise, sondern auch das Fortschreiten erleichtern. Daß implizite Definitionen nicht zu falschen oder bedeutungslosen Folgerungen führen, ergibt sich aus dem Wesen des mathematischen Beweises“ (NG Seite 216).

Näheres über das Wesen und die Unentbehrlichkeit der impliziten Definitionen siehe: Pasch, Veränderliche und Funktion, 1914, §§ 19, 23, 70. Dort ist die implizite Definition der Menge in den §§ 18 und 25 erörtert. Wenden wir sie hier an, so können wir von dem Gemeinnamen (in Def. 1) „Punkt irgend einer von den ebenen Flächen II“ zur Menge P dieser Punkte aufsteigen, diese Menge (wie in Def. 2) eine Ebene, die Ebene ABC, nennen und schließlich nach der a. a. O. benutzten Ausdrucksweise jene Punkte „Stücke von P“, hier: Punkte von P.

§ 4. Sätze über die Ebene.

Lehrsatz 1. — Durch drei Punkte kann man immer eine Ebene legen, d. h.: Sind drei Punkte L, M, N beliebig angegeben, so kann man eine Ebene ABC angeben, die durch L, M, N geht.

Beweis. — Wenn L, M, N nicht in gerader Linie liegen, so sei A ein Punkt der Geraden MN, B ein Punkt der

Geraden NL, C ein Punkt der Geraden LM; dabei seien A, B, C von L, M, N verschieden und nicht in einer Geraden gelegen. Durch L, M, N können wir eine ebene Fläche legen, weiter auch durch L, M, N, A, B, C. Wenn L, M, N in einer Geraden liegen, so sei A ein Punkt außerhalb dieser Geraden, B ein Punkt der Geraden AL, von A und L verschieden, C ein Punkt der Geraden AM, von A und M verschieden. Durch A, L, M können wir eine ebene Fläche legen, weiter auch durch L, M, N, A, B, C. In beiden Fällen liegen A, B, C nicht in gerader Linie und L, M, N, A, B, C in einer ebenen Fläche, d. h.: L, M, N liegen in der Ebene ABC.

Definition 1. — Auch die Punkte A, B, C selbst heißen Punkte der Ebene ABC.

Lehrsatz 2. — Ist eine Ebene ABC angegeben, so kann man einen Punkt D angeben, der ihr nicht angehört.

Beweis. — A, B, C liegen nicht in einer Geraden, man kann folglich einen Punkt D so angeben, daß A, B, C, D keine ebene Figur bilden. D liegt dann in keiner durch A, B, C gehenden ebenen Fläche, d. h.: D liegt nicht in der Ebene ABC.

Lehrsatz 3. — Ist eine Ebene ABC angegeben, so kann man eine von ihr verschiedene Ebene angeben.

Beweis. — Es sei D ein Punkt, der der Ebene ABC nicht angehört. Es liegen dann A, B, C, D nicht in einer ebenen Fläche, also auch nicht drei von diesen Punkten auf einer Geraden; die Ebene ABD ist verschieden von der Ebene ABC.

Lehrsatz 4. — In jeder Ebene können drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte angegeben werden.

Lehrsatz 5. — Ist A′ ein Punkt der Ebene ABC, und bilden die Punkte A′, B, C keine gerade Reihe, so bedeutet A′BC dieselbe Ebene wie ABC.

Beweis. — Der Voraussetzung zufolge liegen A′, A, B, C in einer ebenen Fläche. Da A′, B, C keine gerade Reihe

bilden, so liegt A in der Ebene A′BC; überhaupt liegen A, A′, B, C in den Ebenen ABC und A′BC. Ist nun D ein andrer Punkt der Ebene A′BC, so liegt A in einer durch A′, B, C gelegten ebenen Fläche Π, D ebenfalls in einer durch A′, B, C gelegten ebenen Fläche, folglich in Π oder in einer Erweiterung von Π. Es liegen mithin A, B, C, A′, D in einer ebenen Fläche, D in der Ebene ABC. Jeder Punkt der Ebene A′BC ist also auch Punkt der Ebene ABC. Ebenso ergibt sich, daß jeder Punkt der Ebene ABC auch Punkt der Ebene A′BC ist.

Lehrsatz 6. — Jede Ebene ist durch drei beliebige von ihren Punkten, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt.

Beweis. — A′, B′, C′, seien drei beliebige Punkte der Ebene ABC, aber nicht in einer Geraden gelegen. Der Punkt A′ kann in höchstens zweien von den Geraden BC, CA, AB liegen; er liege außerhalb der Geraden BC; dann fallen die Ebenen ABC und A′BC zusammen. Der Punkt B′ liegt in der Ebene A′BC, doch nicht in den Geraden A′B und A′C zugleich; er liege außerhalb der Geraden A′C; dann fallen die Ebenen A′BC und A′B′C zusammen, folglich auch ABC und A′B′C. Der Punkt C′ liegt in der Ebene A′B′C, aber nicht in der Geraden A′B′; es fallen mithin die Ebenen A′B′C und A′B′C′ zusammen, folglich auch ABC und A′B′C′.

Lehrsatz 7. — Drei Punkte, die zugleich verschiedenen Ebenen angehören, liegen in einer Geraden.

Beweis mittels Lehrsatz 6.

Lehrsatz 8. — Ist ein Punkt D angegeben, so kann man eine Ebene angeben, die ihn nicht enthält.

Beweis. — Wir wählen einen von D verschiedenen Punkt A, weiter einen Punkt B so, daß D, A, B nicht in einer Geraden liegen, und endlich C so, daß D, A, B, C keine ebene Figur bilden. Legen wir dann durch die Punkte A, B, C eine Ebene, so enthält diese nicht den Punkt D.

Lehrsatz 9. — Ist eine Ebene ABC und eine andre Ebene Q angegeben, so kann man in der Ebene ABC einen Punkt angeben, der nicht in Q liegt.

Beweis. — Von den Punkten A, B, C können höchstens zwei auf Q liegen, folglich liegt mindestens einer nicht auf Q.

Lehrsatz 10. — Sind zwei Punkte A, B angegeben, so kann man durch A eine Ebene legen, die B nicht enthält.

Lehrsatz 11. — Liegen in der Ebene P die Punkte A und B, so kann man in ihr C so wählen, daß A, B, C nicht in gerader Linie liegen.

Beweis mittels § 2 Grundsatz III.

Lehrsatz 12. — Sind zwei Punkte A, B der Geraden g zugleich Punkte der Ebene P, so ist jeder Punkt der Geraden g Punkt der Ebene P.

Beweis. — Es sei C ein Punkt der Ebene P außerhalb g, D ein beliebiger dritter Punkt der Geraden g. Die Punkte A, B, C liegen in einer ebenen Fläche, weiter auch A, B, C, D (§ 2, Grds. VIII). D ist also ein Punkt der Ebene ABC, d. i. der Ebene P.

Lehrsatz 13. — Sind zwei Ebenen angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der in keiner von ihnen liegt.

Lehrsatz 14. — Sind zwei Punkte angegeben, so kann man eine Ebene angeben, die keinen von ihnen enthält.

Lehrsatz 15. — Geht die Ebene P durch die Punkte A und B, so kann durch diese Punkte noch eine Ebene gelegt werden.

Beweis. — Wählt man den Punkt D außerhalb der Ebene P (Lehrsatz 2) und legt durch A, B, D eine Ebene Q (Lehrsatz 1), so liegt D in Q, aber nicht in P; Q ist von P verschieden.

Lehrsatz 16. — Geht die Ebene P durch den Punkt A, so kann durch A noch eine Ebene gelegt werden.

Beweis mittels Lehrsatz 15.

§ 5. Ebene und Gerade.

Durch Lehrsatz 12 des § 4 wird folgende Definition veranlaßt:

Definition 1. — Ist jeder Punkt einer Geraden g zugleich Punkt der Ebene P, so sagt man: g ist in P enthalten, g gehört P an, liegt in P, ist eine Gerade von P, P enthält g, geht durch g, ist eine Ebene von g.

Lehrsatz 1. — Eine Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

Beweis mittels § 4 Lehrsatz 12 und Definition 1 dieses Paragraphen.

Lehrsatz 2. — Zwei Ebenen, die zwei Punkte gemein haben, haben die Gerade der beiden Punkte gemein.

Beweis mittels Lehrsatz 1.

Lehrsatz 3. — Ist eine Ebene angegeben, so kann man eine Gerade angeben, die nicht in ihr liegt.

Beweis folgt aus § 4 Lehrsatz 2.

Lehrsatz 4. — Ist eine Gerade angegeben, so kann man eine Ebene angeben, die nicht durch sie geht.

Beweis mittels § 4 Lehrsatz 8.

Lehrsatz 5. — Ist eine Ebene angegeben und auf ihr ein Punkt, so kann man eine Gerade angeben, die mit der Ebene nur diesen Punkt gemein hat.

Beweis mittels § 4 Lehrsatz 2.

Lehrsatz 6. — Ist eine Gerade angegeben und auf ihr ein Punkt, so kann man eine Ebene angeben, die mit der Geraden nur diesen Punkt gemein hat.

Beweis mittels § 4 Lehrsatz 10.

Definition 2. — Haben die Gerade g und die Ebene P nur einen Punkt A gemein, so nennt man A den Durchschnittspunkt von g und P; man sagt: g und P schneiden sich in A. Diesen Punkt A bezeichnet man auch mit Pg oder gP.

Lehrsatz 7. — Durch eine Gerade und einen Punkt kann man immer eine Ebene legen.

Beweis. — A und B seien Punkte der Geraden g, C ein von A und B verschiedener, aber sonst beliebiger Punkt. Durch A, B, C legen wir eine Ebene; diese enthält die Punkte A und B, mithin die Gerade g.

Lehrsatz 8. — Jede Ebene ist durch eine beliebige ihr angehörige Gerade im Verein mit einem beliebigen ihr angehörigen Punkt, der nicht in der Geraden liegt, bestimmt.

Beweis. — Die Ebene P enthalte die Gerade g und den Punkt C, der außerhalb g liegt. A und B seien zwei Punkte von g. Ließe sich durch g und C noch eine zweite Ebene legen, so ginge diese zweite Ebene auch durch die Punkte A, B, C; durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist aber immer nur eine Ebene möglich.

Lehrsatz 9. — Zwei Ebenen, die eine Gerade gemein haben, haben außerdem keinen Punkt gemein.

Lehrsatz 10. — Wenn ein Punkt und eine Gerade sich in zwei Ebenen vorfinden, so geht die Gerade durch den Punkt.

Beweis von 9 und 10 folgt aus Lehrsatz 8.

Lehrsatz 11. — Durch zwei Geraden, die einen Punkt gemein haben, kann man immer eine Ebene legen.

Beweis. — A sei der Schnittpunkt der Geraden g und h. Auf einer der Geraden, etwa g, nehmen wir den Punkt C beliebig an, aber verschieden von A. Durch die Gerade h und den Punkt C ist eine Ebene bestimmt. Diese enthält die Punkte C und A der Geraden g, folglich die Gerade g.

Lehrsatz 12. — Zwei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, haben keinen Punkt gemein.

Lehrsatz 13. — Jede Ebene ist durch zwei beliebige von ihren Geraden bestimmt.

Beweis mittels Lehrsatz 8.

Definition 3. — Liegen zwei Geraden g, h in einer Ebene, so heißt diese die Ebene der Geraden g und h.

Sie wird mit gh bezeichnet; man darf jedoch nicht vergessen, daß im Falle einer Begegnung der Geraden g und h für den Durchschnittspunkt dieselbe Bezeichnung gilt.

Lehrsatz 14. — Zwei Ebenen können nicht mehr gemein haben als eine Gerade (Lehrsatz 9 und 13).

Lehrsatz 15. — Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein.

Beweis. — A sei der gemeinschaftliche Punkt der Ebenen P und Q. In der Ebene P nehmen wir die Punkte B und C, in der Ebene Q die Punkte D und E, aber so, daß weder A, B, C noch A, D, E gerade Reihen bilden. Durch A, B, C legen wir eine ebene Fläche II, durch A, D, E eine ebene Fläche II'. Es gibt dann (§ 2 Grds. X) einen Punkt F derart, daß sowohl A, B, C, F als auch A, D, E, F ebene Figuren bilden. F liegt in den Ebenen ABC und ADE, d. h. in P und Q. P und Q haben die Punkte A und F gemein, mithin die Gerade AF.

Definition 4. — Ist g die gemeinschaftliche Gerade der beiden Ebenen P und Q, so nennt man sie die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, ihre Punkte die Durchschnittspunkte. Man sagt: die Ebenen P und Q schneiden sich in g. Man bezeichnet die Durchschnittslinie der Ebenen P und Q mit PQ.

Lehrsatz 16. — Sind durch die Gerade g zwei Ebenen P, Q gelegt, so kann durch g noch eine Ebene gelegt werden.

Beweis mittels § 4 Lehrsatz 13.

Lehrsatz 17. — Sind zwei Ebenen P, Q gegeben, so kann man eine Ebene R so legen, daß zwei verschiedene Schnittlinien entstehen. Keine von ihnen ist Schnittlinie von P und Q.

Beweis. — Man kann A auf P außerhalb Q, B auf Q außerhalb P wählen (§ 4 Lehrsatz 9) und durch A, B eine Ebene R legen. Die Ebenen P und R haben eine Gerade PR, die Ebenen Q und R eine Gerade QR gemein (Lehrsatz 15 und Def. 4). Auf Q liegt nicht der Punkt A, folg-

lich auch nicht die Gerade PR. Auf P liegt nicht der Punkt B, folglich auch nicht die Gerade QR.

§ 6. Durchschnitt von drei Ebenen.

Lehrsatz 1. — Wenn drei Ebenen, P, Q, R sich paarweise schneiden, so sind die drei Schnittlinien entweder sämtlich ungleich oder sämtlich gleich.

Beweis. — Die Ebenen P und Q schneiden sich in der Geraden PQ, die Ebenen Q und R in der Geraden QR, die Ebenen R und P in der Geraden RP. Wenn nun PQ = QR ist, so gehört die Gerade PQ den Ebenen P, Q, R an; die Ebenen R und P haben dann die Gerade PQ gemein, es muß also PQ = RP sein (§ 5 Lehrsatz 14).

Lehrsatz 2. — Schneiden sich die Ebenen P und Q, so kann man eine Ebene R so legen, daß die Ebenen P, Q, R einen und nur einen Punkt gemein haben.

Beweis. — g sei die Durchschnittsgerade der Ebenen P und Q, A ein Punkt dieser Geraden. Es gibt dann eine Ebene R, die mit g nur den Punkt A gemein hat. A ist also der einzige gemeinschaftliche Punkt der drei Ebenen.

Lehrsatz 3. — Haben drei Ebenen einen Punkt gemein, so schneiden sie sich paarweise. Haben sie nur einen Punkt gemein, so entstehen drei verschiedene Schnittlinien, und diese schneiden sich in einem Punkt. Haben sie mehr als einen Punkt gemein, so fallen die Schnittlinien zusammen.

Beweis folgt aus früheren Sätzen über Schnitt von Geraden und Schnitt von Ebenen.

Lehrsatz 4. — Drei Ebenen, die sich nicht in einer und derselben Geraden schneiden, haben höchstens einen Punkt gemein.

Definition 1. — Haben die Ebenen P, Q, R nur den Punkt A gemein, so nennt man A ihren Durchschnittspunkt und bezeichnet ihn mit PQR. Man sagt: die drei Ebenen schneiden sich im Punkt A.

Lehrsatz 5. — Schneiden sich drei Ebenen P, Q, R in erschiedenen Geraden, und haben zwei von diesen Gevraden einen Punkt A gemein, so schneiden die drei Ebenen sich in A.

Beweis mittels Definition 1 und § 5 Definition 4.

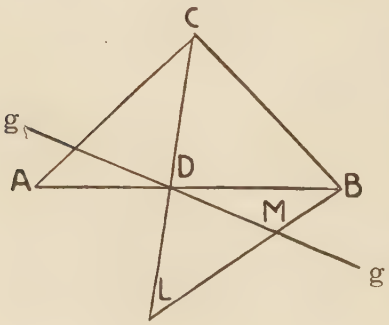
§ 7. Ebene Figuren.

Die in § 2 gegebene Definition der ebenen Figur Def. 4) ändern wir, nachdem wir von der ebenen Fläche zur Ebene aufgestiegen sind, wie folgt ab:

Definition 1. — Ein beliebiger Verein von Punkten oder Geraden oder Punkten und Geraden einer Ebene heißt eine ebene Figur.

Bei der Untersuchung von ebenen Figuren ist man oft genötigt, die Figur durch willkürliche Punkte oder Geraden derselben Ebene zu erweitern oder dadurch, daß man einzelne Punkte der Figur durch Hilfsgeraden verbindet und auftretende Schnittpunkte als Hilfspunkte benutzt. Dieses Erweitern einer Figur fällt unter den Begriff des „Konstruierens"; siehe § 2 Def. 4.

Lehrsatz 1. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, D ein innerer Punkt der Strecke AB, so kann man in der Ebene ABC durch D eine Gerade ziehen, die durch keinen der Punkte A, B, C hindurchgeht.



Beweis. – Wir wählen auf der Geraden DC den Punkt L so, daß D zwischen C und L liegt. Auf der Geraden LB wählen wir den Punkt M zwischen L und B. M liegt dann nicht auf AB oder CD. Die Gerade MD geht also durch keinen der Punkte A, B, C.

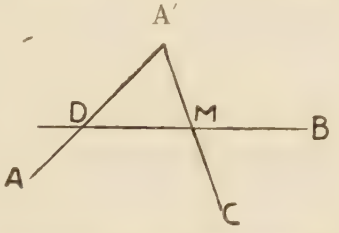
Lehrsatz 2. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, D ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B, g eine Gerade in der Ebene ABC, die durch D, aber durch keinen der Punkte A, B, C hindurchgeht, so begegnet g entweder der Geraden AC zwischen A und C, oder der Geraden BC zwischen B und C.

Beweis mittels § 2 Lehrsatz 6.

Lehrsatz 3. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, a ein Punkt der Geraden BC zwischen B und C, b ein Punkt der Geraden CA zwischen C und A, c ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B, so liegen die Punkte a, b, c nicht in gerader Linie.

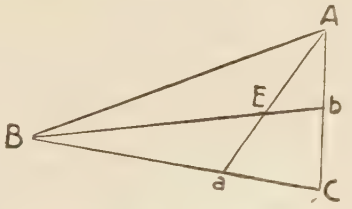
Beweis: NG Seite 25, Lehrsatz 11.

Lehrsatz 4. — Liegen vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so haben entweder die Geraden AD und BC, oder BD und AC, oder CD und AB mindestens einen Punkt gemein.



Beweis: NG Seite 26, Lehrsatz 12. Zu diesem Beweis ist zu bemerken, daß A′ außerhalb der Geraden BC zu wählen ist. In Zeile 14 von oben muß es dort heißen A′C statt AC, in Zeile 20 von oben A′B statt A′M.

Lehrsatz 5. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, a ein Punkt der Geraden BC zwischen B und C, b ein Punkt der Geraden CA zwischen C und A, so ist a von A, b von B verschieden; die Geraden aA und bB sind verschieden und schneiden sich in einem Punkt E zwischen a und A, zugleich zwischen b und B; E liegt auf keiner der Geraden AB, BC, CA.



Beweis: NG Seite 209, Lehrsatz 13.

Lehrsatz 6. — Man kann Punkte A, B, C, D so wählen, daß nicht drei von ihnen eine gerade Reihe bilden, und daß die Gerade AD durch einen Punkt a der Strecke BC, die Gerade BD durch einen Punkt b der Strecke AC geht.

Beweis. — A, B, C seien drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen. Auf der Strecke BC nehmen wir einen inneren Punkt a an, auf der Strecke AC einen inneren Punkt b. Die Geraden aA und bB sind voneinander verschieden und schneiden sich in einem Punkt D. Dieser Punkt D liegt auf keiner der Geraden AB, BC, CA; es genügen dann die Punkte A, B, C, D den gestellten Bedingungen.

Lehrsatz 7. — Liegen von den Punkten A, B, C, D keine drei in einer Geraden, und geht die Gerade AD durch einen Punkt a der Strecke BC, die Gerade BD durch einen Punkt b der Geraden AC, so geht die Gerade CD durch einen Punkt der Strecke AB.

Beweis. — Die Punkte a, b, A, B, C sind voneinader verschieden, ebenso die Geraden aA und bB. Diese beiden Geraden schneiden sich einerseits in einem Punkt E zwischen a und A, andrerseits in D, folglich fällt D mit E zusammen und liegt zwischen a und A. U. s. w. wie in Beweis zu Lehrsatz 14 in NG, Seite 210.

§ 8. Schenkel einer Geraden.

In NG § 3 wird bezüglich der Ausdrucksweisen „auf derselben Seite eines Punktes", „auf verschiedenen Seiten eines Punktes" auf die Definition in NG § 1 Seite 9 zurückgegriffen. Ich habe schon in § 3 meiner Arbeit den Begriff der Menge herangezogen; wie dort zur Definition der Ebene, so läßt dieser Begriff sich auch hier, bei der Definition von „Seite eines Punktes auf einer Geraden", verwenden. Um dies zu tun, werde auf der Geraden m der Punkt S fest angenommen, dann irgend ein Punkt A

auf m von S verschieden; D sei Gemeinname für die von S verschiedenen Punkte der Geraden m, die auf der Strecke SA oder auf ihrer Verlängerung über A hinaus liegen. Bezeichnet man die Menge der Punkte D mit M, so sind die Punkte D „Stücke von M“ zu nennen (vergl. § 3 am Ende).

Definition 1. — Die Menge M heiße die „A-Seite des Punktes S auf m“, D ein „Punkt der A-Seite des Punktes S auf m“. Wir sagen: D liegt auf m auf der A-Seite des Punktes S.

Bemerkung. — Hiernach liegt A auf der A-Seite. Ein von S und A verschiedener Punkt A′ der m liegt dann und nur dann auf der A-Seite, wenn A′ zwischen A und S oder A zwischen A′ und S, d. h. wenn S nicht zwischen A und A′ (NG § 1 Lehrsatz 7).

Lehrsatz 1. — Ist B auf m ein von A verschiedener Punkt der A-Seite von S, so fällt die A-Seite mit der B-Seite zusammen.

Beweis. — Der Punkt S liegt nicht zwischen A und B, also entweder A zwischen B und S oder B zwischen A und S. Nach der Bemerkung zu Definition 1 liegen A und B zugleich auf der A-Seite und der B-Seite. Mit A′ bezeichne ich irgend einen andern Punkt der A-Seite, so daß S (Bemerkung zu Definition 1) nicht zwischen A und A′. Läge S zwischen A′ und B, zugleich A zwischen B und S, so läge S zwischen A und A′ (NG § 1 Lehrsatz 13); läge S zwischen A′ und B, zugleich B zwischen A und S, so läge S ebenfalls zwischen A und A′ (NG § 1 Lehrsatz 16). Folglich liegt S nicht zwischen A′ und B, d. h. A′ liegt auf der B-Seite von S.

Die Lehrsätze 7, 13 und 16 aus NG § 1 durften, obgleich sie dort erst hinter der Definition von „Seite“ stehen, hier in der Bemerkung zu Definition 1 und im Beweis zu Lehrsatz 1 benutzt werden, weil der Begriff „Seite“ in NG § 1 zwar eingeführt, aber nirgends benutzt wird.

Nach NG § 1 Lehrsatz 9 kann Punkt E auf m so gewählt werden, daß S zwischen A und E liegt.

Lehrsatz 2. — Liegt S zwischen A und E, so ist die A-Seite von der E-Seite verschieden und zwar derart, daß kein Punkt auf beiden zugleich liegen kann.

Beweis. — A-Seite und E-Seite sind schon deshalb verschieden, weil A nicht auf der E-Seite, E nicht auf der A-Seite liegt. Ist nun B ein von A verschiedener Punkt der A-Seite, so liegt entweder B zwischen A und S oder A zwischen B und S, folglich S zwischen B und E entweder nach dem 13. oder nach dem 16. Lehrsatz in NG § 1.

Lehrsatz 3. — Liegt S auf m zwischen A und E, und ist H ein von S verschiedener Punkt auf m, so liegt H entweder auf der A-Seite oder auf der E-Seite. Die H-Seite fällt also entweder mit der A-Seite oder mit der E-Seite zusammen; es gibt auf m zwei und nur zwei Seiten von S.

Beweis. — Liegt H (von E verschieden) nicht auf der A-Seite, so liegt S zwischen A und E und zwischen A und H, folglich (NG § 1 Lehrsatz 15) S nicht zwischen E und H, d. h. H auf der E-Seite.

Die vorstehenden Lehrsätze bilden die Unterlage für die Begriffe auf derselben Seite und auf verschiedenen Seiten für Punkte einer Geraden, sowie für die darauf bezüglichen Sätze in NG § 3 Absatz 2. Anschließend an diese Sätze wird dort in Absatz 3 für die Gerade der Begriff des Schenkels eingeführt. Hier können wir bei der Definition des Schenkels den neu gewonnenen Begriff von „Seite eines Punktes auf einer Geraden“ benutzen.

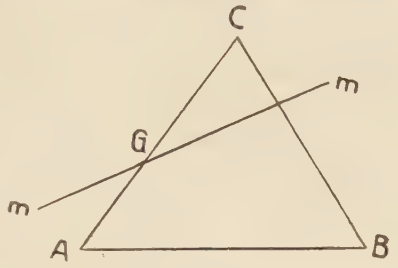
Definition 2. — Die A-Seite des Punktes S der Geraden m heißt der Schenkel SA (nicht AS) der Geraden m.

Damit ist die Unterlage für den ganzen Inhalt von NG § 3 Absatz 3 hergestellt.

§ 9. Schenkel einer Ebene.

In NG § 3 Absatz 4 wird eine Ebene P und in ihr eine Gerade m eingeführt, weiter zwei Punkte A, B der

Ebene P außerhalb m, und es wird unterschieden, ob m die Gerade AB zwischen A und B trifft oder nicht. Bezüglich der Möglichkeit dieser Unterscheidung sei folgendes bemerkt. Nimmt man einen Punkt G auf m außerhalb der Geraden AB, dann C auf der Verlängerung der Strecke AG über G hinaus, so liegen C und G auf P; m geht daher (§ 7 Lehrsatz 2) entweder durch einen Punkt der Strecke AB oder durch einen Punkt der Strecke BC, und zwar kann (§ 7 Lehrsatz 3) nur eine dieser Möglichkeiten eintreten. Mittels solcher Hilfspunkte, wie G und C, kann also entschieden werden, ob m die Strecke AB trifft. Nunmehr sei D Gemeinname für den Punkt A und die auf P, aber nicht auf m gelegenen Punkte deren Verbindungsstrecke mit A die Gerade m nicht trifft. Bezeichnet man die Menge der Punkte D mit M, so sind die Punkte D „Stücke von M“ zu nennen.



Definition 1. — Die Menge M heiße die „A-Seite der Geraden m auf der Ebene P“, D ein „Punkt der A-Seite von m auf P“. Wir sagen: D liegt in der Ebene P auf der A-Seite der Geraden m.

Bemerkung. — Hiernach liegt A auf der A-Seite. Ein von A verschiedener Punkt A′ auf P außerhalb m liegt dann und nur dann auf der A-Seite, wenn m die Strecke AA′ nicht trifft.

Lehrsatz 1. — Ist B auf P ein von A verschiedener Punkt der A-Seite von m, so fällt die A-Seite mit der B-Seite zusammen.

Beweis. — Die Gerade m trifft nicht die Strecke AB. Nach der Bemerkung zu Definition 1 liegen A und B zugleich auf der A-Seite und der B-Seite. Mit A′ bezeichne

ich irgend einen andern Punkt der A-Seite. Liegt A′ außerhalb der Geraden AB, so trifft m die Strecke AA′ nicht; folglich trifft m (§ 7 Lehrsatz 3) nicht die Strecke A′B, d. h. A′ liegt auch auf der B-Seite. Liegt A′ auf der Geraden AB, so liegt A′ auf der B-Seite nach NG § 1 Lehrsatz 12.

Werden P, m und A festgehalten, so kann der Punkt E auf P außerhalb m so gewählt werden, daß m die Strecke AE trifft.

Lehrsatz 2. — Liegen Punkte A, E auf P außerhalb m so, daß m die Strecke AE trifft, etwa in J, so ist die A-Seite von der E-Seite verschieden und zwar derart, daß kein Punkt auf beiden zugleich liegen kann.

Beweis. — Es sei A′ ein Punkt der A-Seite. Liegt A′ auf der Geraden AE, so liegt A′ im Schenkel JA, J zwischen A′ und E, A′ nicht auf der E-Seite. Liegt A′ nicht auf der Geraden AE, so trifft m die Strecke A′E nach § 7 Lehrsatz 2.

Lehrsatz 3. — Wird die vorige Voraussetzung beibehalten, und ist H irgend ein Punkt auf P außerhalb m, so liegt H entweder auf der A-Seite oder auf der E-Seite. Die H-Seite fällt also entweder mit der A-Seite oder mit der E-Seite zusammen; es gibt auf P zwei und nur zwei Seiten von m.

Beweis. — Es sei H ein Punkt von P, nicht auf der A-Seite. Liegt H auf der Geraden AE, so liegt H im Schenkel JE, J nicht zwischen H und E, H auf der E-Seite. Liegt H (von E verschieden) nicht auf der Geraden AE, so trifft m die Strecke AE und die Strecke AH, folglich (§ 7 Lehrsatz 3) nicht die Strecke EH.

Die vorstehenden Sätze bilden die Unterlage für die Begriffe *auf derselben Seite* und *auf verschiedenen Seiten* für Punkte einer Ebene, sowie für die darauf bezüglichen Sätze in NG § 3 Absatz 4. Es bleibt noch der Begriff des *Schenkels* für die Ebene einzuführen. Dies geschieht jetzt durch

Definition 2. — Die A-Seite der Geraden m auf der Ebene P heißt der Schenkel mA (nicht Am) der Ebene P.

Vergleiche hierzu: NG § 4 Absatz 5.

Bemerkung zu NG Seite 28 f.

Aus der Definition des Begriffs „zwischen Schenkeln" im Strahlenbüschel folgt: Wird vom Schenkel SC gesagt, daß er zwischen den Schenkeln SA und SB liegt, so sind SA und SB Schenkel verschiedener Geraden, und die Punkte B, C liegen auf derselben Seite der Geraden SA. Die Punkte M, N, S liegen daher nicht in gerader Linie, A und N auf derselben Seite der Geraden SM, usw.

§ 10. Figur aus Punkten und Geraden.

In NG § 3 werden die Figuren des Strahlenbündels und des Strahlenbüschels eingeführt. Dabei ist zu ergänzen, daß in solchen Gebilden beliebig viele Strahlen angegeben werden können. Allgemeiner: Sind in einem Strahlenbündel Strahlen angegeben, so kann ein Punkt angegeben werden, der auf keinem jener Strahlen liegt; sind in einem Strahlenbüschel Strahlen angegeben, so kann in seiner Ebene ein Punkt angegeben werden, der auf keinem jener Strahlen liegt. Die Richtung, in der sich diese Sätze bewegen, soll hier weiter verfolgt werden.

Nach NG § 1, Lehrsatz 18 kann auf einer Geraden, auf der Punkte angegeben sind, ein weiterer Punkt angegeben werden. Daran schließt sich

Lehrsatz 1. — Sind zwei Geraden f, g angegeben und auf f Punkte, so kann auf f ein von diesen verschiedener Punkt angegeben werden, der nicht auf g liegt.

Lehrsatz 2. — Sind Geraden f, $g_1, \ldots, g_n$ angegeben und auf f Punkte $a_1, \ldots, a_m$, so kann auf f ein von den a verschiedener Punkt angegeben werden, der auf keiner der Geraden g liegt. Für m kann hier jede natürliche Zahl eintreten; wegen n siehe Lehrsatz 4.

Beweis. — Für $n = 1$ fällt der Satz mit Lehrsatz 1 zusammen. Im Fall $n > 1$ nehme ich an, daß der Satz für die natürlichen Zahlen unterhalb n bewiesen sei. Dann kann ich auf f einen von den a verschiedenen Punkt A angeben, der auf keiner der Geraden $g_1, \ldots, g_{n-1}$ liegt, und brauche nur den Fall zu verfolgen, daß g_n durch den gewählten Punkt A hindurchgeht. In diesem Fall kann ich auf f einen von allen a und von A verschiedenen Punkt B angeben, der auf keiner der Geraden $g_1, \ldots, g_{n-1}$ liegt; B liegt auch nicht auf g_n.

Lehrsatz 3. — Sind Geraden $f, g_1, \ldots, g_n$ angegeben, so kann man auf f einen Punkt angeben, der auf keiner der Geraden $g_1, \ldots, g_n$ liegt. Wegen n siehe Lehrsatz 4.

Lehrsatz 4. – Sind Geraden $g_1, \ldots, g_n$ angegeben, so kann man eine weitere Gerade angeben. Danach kann in den Lehrsätzen 2, 3 und 4 für n jede natürliche Zahl eintreten.

Beweis. — Auf g_n nehme ich A außerhalb der Geraden $g_1, \ldots, g_{n-1}$; auf g_1 nehme ich B außerhalb g_n. Dann ist die Gerade AB von allen g verschieden.

Lehrsatz 5. – Sind beliebig viele Geraden angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der keiner von ihnen angehört.

Lehrsatz 6. – Sind Geraden und Punkte in beliebiger Anzahl angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der auf keiner der Geraden liegt und mit keinem der Punkte zusammenfällt.

Lehrsatz 7. — Sind in einer Ebene beliebig viele Geraden angegeben, so kann man in ihr eine weitere Gerade angeben.

Beweis wie bei Lehrsatz 4.

Lehrsatz 8. – Sind in einer Ebene beliebig viele Geraden angegeben, so kann man in ihr einen Punkt angeben, der keiner der Geraden angehört.

Lehrsatz 9. — Sind in einer Ebene beliebig viele Geraden und Punkte angegeben, so kann man in ihr einen Punkt angeben, der auf keiner der Geraden liegt und mit keinem der Punkte zusammenfällt.

§ 11. Seiten einer Ebene.

In NG § 4 Absatz 1 ist von einer Ebene P und von zwei Punkten A,B außerhalb dieser Ebene die Rede, und es wird unterschieden, ob die Ebene die Gerade AB zwischen A und B trifft oder nicht. Bezüglich der Möglichkeit dieser Unterscheidung sei folgendes bemerkt. Nimmt man auf P einen Punkt G nicht in der Geraden AB, weiter auf der Verlängerung der Strecke AG über G hinaus einen Punkt C, so liegen A, B, C nicht in einer Geraden, bestimmen also eine Ebene. Die Ebenen ABC und P sind voneinander verschieden und haben den Punkt G gemein, mithin auch eine durch G gehende Gerade f. Diese Gerade f geht (§ 7 Lehrsatz 2) entweder durch einen Punkt der Strecke AB oder durch einen Punkt der Strecke BC, und zwar kann (§ 7 Lehrsatz 3) nur e i n e dieser beiden Möglichkeiten eintreten. Unter Heranziehung von Hilfspunkten wie G und C läßt sich also immer entscheiden, ob P mit der Strecke AB einen Punkt gemein hat oder nicht. Nunmehr sei D Gemeinname für den Punkt A und die Punkte außerhalb der Ebene P, deren Verbindungsstrecke mit A die Ebene P nicht trifft. Bezeichnet man die Menge der Punkte D mit M, so sind die Punkte D „Stücke von M“ zu nennen.

Definition. — Die Menge M heiße die „A-Seite der Ebene P“, D ein „Punkt der A-Seite der Ebene P“. Wir sagen: D liegt auf der A-Seite der Ebene P.

Die Sätze in den §§ 8 und 9, die für „Seite eines Punktes auf einer Geraden“ und „Seite einer Geraden auf einer Ebene“ gelten, lassen sich nun auf den Begriff „Seite

einer Ebene“ übertragen. Dadurch erhält man die Unterlage für die Begriffe auf derselben Seite einer Ebene und auf verschiedenen Seiten einer Ebene, sowie für die darauf bezüglichen Sätze in NG § 4, Absatz 2—4.

Bemerkung zu NG Seite 31.

In Zeile 8. v. o. ist einzufügen, daß der Punkt A nicht auf der Ebene P liegen soll.

§ 12. Figur aus Punkten, Geraden und Ebenen.

In NG § 4 werden die Figuren des Ebenenbüschels und des Ebenenbündels eingeführt. Dabei ist zu ergänzen, daß in solchen Gebilden beliebig viele Ebenen angegeben werden können. Allgemeiner: Sind in einem Ebenenbüschel oder in einem Ebenenbündel Ebenen angegeben, so kann ein Punkt angegeben werden, der auf keiner dieser Ebenen liegt. Wir verfolgen diesen Gegenstand nach dem Vorgang unseres § 10.

Aus § 10 Lehrsatz 9 folgt

Lehrsatz 1. — Sind zwei Ebenen P, Q angegeben und auf P beliebig viele Geraden und Punkte, so kann auf P ein von allen gegebenen Punkten verschiedener Punkt angegeben werden, der auf keiner der gegebenen Geraden und nicht auf Q liegt.

Lehrsatz 2. — Sind Ebenen $P, Q_1, \ldots, Q_n$ angegeben und auf P Geraden $g_1, \ldots, g_m$ und Punkte $a_1, \ldots, a_p$, so kann auf P ein von den a verschiedener Punkt angegeben werden, der auf keiner der Geraden g und in keiner der Ebenen Q liegt. Für m und p kann hier jede natürliche Zahl eintreten; wegen n siehe Lehrsatz 4.

Beweis. — Für $n = 1$ fällt der Satz mit Lehrsatz 1 zusammen. Im Fall $n > 1$ nehme ich an, daß der Satz für die natürlichen Zahlen unterhalb n bewiesen sei. Dann kann ich auf P einen von den a verschiedenen Punkt A

angeben, der auf keiner der Geraden g und auf keiner der Ebenen $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ liegt, und brauche nur den Fall zu verfolgen, daß A auf Q_n liegt. In diesem Fall haben P und Q eine Gerade f gemein. Wähle ich dann auf P einen von den a verschiedenen Punkt B, der auf keiner der Geraden f, $g_1, \ldots, g_n$ und in keiner der Ebenen $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ liegt, so liegt B auch nicht auf Q_n.

Lehrsatz 3. — Sind Ebenen P, $Q_1, \ldots, Q_n$ angegeben, so kann man auf P einen Punkt angeben, der auf keiner der Ebenen $Q_1, \ldots, Q_n$ liegt. Wegen n siehe Lehrsatz 4.

Lehrsatz 4. — Sind Ebenen $Q_1, \ldots, Q_n$ angegeben, so kann man eine weitere Ebene angeben. Danach kann in den Lehrsätzen 2, 3 und 4 für n jede natürliche Zahl eintreten.

Beweis. — Auf Q_n nehme ich einen Punkt A außerhalb der Ebenen $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, auf Q_1 einen Punkt B außerhalb Q_n. Eine durch A, B gelegte Ebene ist dann von allen Ebenen Q verschieden.

Lehrsatz 5. — Sind beliebig viele Ebenen angegeben, so kann man einen Punkt angeben, der auf keiner dieser Ebenen liegt.

Lehrsatz 6. — Sind Ebenen, Geraden und Punkte in beliebiger Anzahl gegeben, so kann man einen Punkt angeben, der auf keiner der Ebenen und keiner der Geraden liegt und mit keinem der Punkte zusammenfällt.

Lebenslauf.

Am 5. Januar 1883 bin ich, Anna Sturmfels, zu Bensheim im Großherzogtum Hessen geboren. Ich besuchte drei Jahre lang die Volksschule in Bad-Nauheim, dem späteren Wohnsitz meiner Eltern, dann bis Ostern 1897 die dortige höhere Mädchenschule. In den folgenden Jahren bereitete ich mich für die Reifeprüfung vor und legte dieselbe im Herbst 1909 am Realgymnasium zu Mainz ab. Hierauf besuchte ich die Universität Gießen von Herbst 1909 bis Ostern 1912 und studierte dort Mathematik und Physik. Ich hörte hier Vorlesungen bei Herrn Geheimrat Pasch, dem ich auch die Anregung zu meiner Dissertation verdanke. Öftere Besprechungen mit Herrn Geheimrat Pasch trugen viel zur Förderung meiner Arbeit bei. In Marburg setzte ich dann meine Studien fort. Ich war dort von Ostern 1912 bis Ostern 1914 immatrikuliert und studierte Mathematik, Physik und Deutsch. Dort legte ich auch die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Nachdem ich im Frühjahr 1915 meine Dissertation eingereicht hatte, bestand ich am 11. August 1915 das Rigorosum. Seit Ende April 1915 bin ich in Offenbach a. M. und unterrichte dort an der höheren Mädchenschule.

Ich bin evangelischer Konfession und besitze die hessische Staatsangehörigkeit.